Correction du DST n°1

27/09/2025

Exercice 1

1. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) \neq 0$ et $\tan(x)$ existe, donc $f(x)$ est bien défini. Ainsi $\underline{f \text{ est bien définie sur l'intervalle }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}$.
2. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{m}{\cos(x)} - \frac{m\sin(x)}{2\cos(x)} \\ &= \frac{2m - m\sin(x)}{2\cos(x)} \end{aligned}$$

   Or :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

   donc

$$m \geq -m\sin(x) \geq -m$$

   d'où

$$3m \geq 2m - m\sin(x) \geq m > 0$$

   et $m\cos(x) > 0$ $\boxed{\text{donc } f(x) > 0.}$
3. $f(0) = m \neq 0$ $\boxed{\text{donc } f \text{ n'est pas impaire.}}$

$$f(\pi/4) = \sqrt{2}m - \frac{m}{2}$$

   et

$$f(-\pi/4) = \sqrt{2}m + \frac{m}{2}$$

   donc $f(\pi/4) < \sqrt{2}m$ et $f(-\pi/4) > \sqrt{2}m$ d'où $\underline{f(\pi/4) \neq f(-\pi/4)}$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas paire.}}$
4. $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\pi/2; \pi/2[$

   $x \mapsto \tan(x)$ est dérivable sur $]-\pi/2; \pi/2[$.

   On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\pi/2; \pi/2[\text{ comme quotient et somme de fonctions dérivables.}}$
5. Pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-m(-\sin(x))}{\cos^2(x)} - \frac{m}{2} \times \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &\boxed{= \frac{2m\sin(x) - m}{2\cos^2(x)}} \end{aligned}$$

6. Pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, $2\cos^2(x) > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2m\sin(x) - m$. On résout pour $x \in]-\pi/2; \pi/2[$:

$$\begin{aligned} 2m\sin(x) - m \geq 0 &\iff 2m\sin(x) \geq m \\ &\iff \sin(x) \geq \frac{1}{2} \\ &\iff x \in [\pi/6; \pi/2[\end{aligned}$$

   et de même $2m\sin(x) - m \leq 0 \iff x \in]-\pi/2; \pi/6[$ et $2m\sin(x) - m = 0 \iff x = \frac{\pi}{6}$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\nearrow$	

dans lequel on lit que $\boxed{f \text{ admet un minimum en } x_0 = \dfrac{\pi}{6}\text{. Ce nombre ne dépend effectivement pas de } m.}$

7. $f(\pi/6) = \dfrac{m}{\sqrt{3}/2} - \dfrac{m}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4m - m}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3m}{2\sqrt{3}} = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$

   En posant $m = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ on a donc $f(\pi/6) = 1$ donc d'après le tableau de variation de f on a bien :

$$\boxed{\forall x \in]-\pi/2; \pi/2[, \quad f(x) \geq 1}$$

Exercice 2

Partie 1

1. $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont toutes deux continues et strictement croissantes sur $]0; +\infty[$. g est donc continue (comme somme de fonctions continues) et strictement croissante (comme somme de fonctions strictement croissantes).

   En 0 on a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ $\boxed{\text{donc par somme } \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty.}$

   En $+\infty$ on a $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ $\boxed{\text{donc par somme } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$

2. D'après la question précédente :
   - g est continue sur $]0; +\infty[$
   - g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
   - $0 \in]\lim\limits_{x\to 0} g(x); \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)[$

   donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]0; +\infty[.}$$

3. On a : $g(1/2) = \dfrac{1}{4} + \ln\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} - \ln(2)$.

   Or
$$0,69 < \ln 2 < 0,7$$
   donc
$$-0,7 < -\ln 2 < -0,69$$
   et donc
$$\frac{1}{4} - 0,7 < g(1/2) < \frac{1}{4} - 0,69$$
   et comme $\frac{1}{4} - 0,69 = -0,44 < 0$ on a $g(1/2) < 0$.

   De plus, $g(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0$ donc finalement $g(1/2) < g(\alpha) < g(1)$, et comme g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ on en déduit que
$$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$$

4. (a) f est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} \\ &= \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x} \end{aligned}$$

Pour tout x dans I, $4x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 4x - 1$. Le trinôme $-2x^2 + 4x - 1$ admet pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$ et pour racines :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{-4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{-4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

On a $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2} > \dfrac{2}{2} = 1$ et comme $1 < 2 < 4$ on a $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ donc $1 < \sqrt{2} < 2$ d'où $-1 > -\sqrt{2} > -2$ donc $2 - \sqrt{2} < 1$ et donc $x_1 < \frac{1}{2}$.

L'intervalle I est donc entièrement compris dans l'intervalle $[x_2; x_1]$ sur lequel le trinôme $-2x^2+4x-1$ est de signe strictement positif, donc $f'(x)$ est strictement positive sur I.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est strictement croissante sur } I}$$

(b) On a $f(1/2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} \ln 2$ donc

$$f(1/2) = \frac{7 + 4\ln 2}{16}$$

Or,

$$0,69 < \ln 2 < 0,7$$

donc

$$7 + 4 \times 0,69 < 7 + 4\ln 2 < 7 + 4 \times 0,7$$

et donc

$$9,76 < 7 + 4\ln(2)$$

On en déduit que $7 + 4\ln 2 > 8$ donc $f(1/2) > \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

De plus,

$$f(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

et finalement comme $\frac{1}{2} < 1$ et que f est strictement croissante sur I on a $f(1/2) < f(1)$. On a donc bien :

$$\boxed{\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1}$$

(c) Pour tout x dans I on a $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$ donc, par croissance de f et d'après les inégalités précédentes :

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1) < 1$$

$\boxed{\text{donc } f(x) \in I.}$

5. (a) $\boxed{u_1 = f(1) = \dfrac{3}{4}}$

(b) $u_0 = 1$ donc $u_0 \in I$. Si pour un rang n dans $\mathbb{N}$ on a $u_n \in I$, alors $f(u_n) \in I$ d'après la question 4.(c). Or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_{n+1} \in I$, et on en déduit par récurrence que <u>pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, $u_n \in I$.</u>

(c) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_{n+1} \leqslant u_n$ »

$u_1 < u_0$ d'après 5.(a). donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier n, alors

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

et comme f est croissante sur I on a

$$f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On en conclut par principe de récurrence que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

$\boxed{\text{On a donc montré que la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ donc la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$. De plus, elle est décroissante d'après la question précédente, donc elle converge d'après le cours vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ par définition de la limite, et comme f est continue sur I on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$

Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on a donc :

$$\ell = f(\ell)$$

donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout x dans I on a :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x = x \\
&\iff -\frac{1}{4}(x^2 + \ln(x)) = 0 \\
&\iff x^2 + \ln(x) = 0 && \text{car } -\frac{1}{4} \neq 0 \\
&\iff g(x) = 0
\end{aligned}$$

et on a montré dans la partie 1 que l'équation $g(x) = 0$ n'admettait qu'une seule solution dans $]0;+\infty[$ que l'on avait noté α. On a donc nécessairement $\ell = \alpha$ $\boxed{\text{d'où } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

Exercice 3

1. Pour tout entier n dans $\mathbb{N}$ on a :

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}$ donc par passage à la limite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}.}$

2. f_1, f_2 et f_3 sont toutes trois dérivables sur $[0;+\infty[$ comme sommes de fonctions dérivables. De plus :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f_1'(x) = 1 - \sin(x) \geq 0$$

par propriétés de la fonction sinus, donc f_1 est croissante et comme $f_1(0) = 0$ on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in [0; +\infty[, \quad f_1(x) \geq 0}$$

Ensuite :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f_2'(x) = x - \sin x = f_1(x) \geq 0$$

donc f_2 est aussi croissante, et comme $f_2(0) = 0$ on en conclut de même que f_2 est positive sur $[0; +\infty[$.

Enfin :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f_3'(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x = f_2(x) \geq 0$$

donc f_3 est croissante sur $[0; +\infty[$ et vérifie également $f_3(0) = 0$, donc f_3 est positive sur $[0; +\infty[$.

3. Pour $n = 1$ on a $1^3 \leq 1^4$ donc l'inégalité est vraie.

   Supposons que pour un entier n on ait

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leq n^4$$

   alors

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \leq n^4 + (n+1)^3$$

   Or $n^4 + (n+1)^3 = n^4 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ tandis que $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$. Comme $n^3 \leq 4n^3$, $3n^2 \leq 6n^2$ et $3n \leq 4n$ on a $n^4 + (n+1)^3 \leq (n+1)^4$ donc finalement on a bien :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \leq (n+1)^4$$

   donc l'inégalité est encore vraie au rang $n + 1$.

   Par principe de récurrence on en conclut que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leq n^4}$$

4. D'après la question 2 on a peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$f_1(k/n^2) \geq 0 \quad \text{et} \quad f_3(k/n^2) \geq 0$$

   d'où

$$\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \geq \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3$$

   en sommant terme à terme ces inégalités on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

   d'où

$$b_n - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq a_n \leq b_n$$

   et comme $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$ d'après la question 3 on a :

$$-\sum_{k=1}^{n} k^3 \geq -n^4$$

donc

$$-\frac{n^4}{6n^6} \leq -\frac{1}{6n^2}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

d'où

$$b_n - \frac{1}{6n^2} \leq b_n - \frac{1}{6n^2}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

et donc

$$\boxed{b_n - \frac{1}{6n^2} \leq a_n}$$

5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$ et que par somme de limites $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(b_n - \dfrac{1}{6n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$, on a par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 4

1. Pour tout entier naturel n non nul, h_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h_n'(x) = nx^{n-1} - nx^{-n-1} = n\frac{x^{2n}-1}{x^{n+1}}$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^{n+1} > 0$ donc $h_n'(x)$ est du signe de $x^{2n}-1$, c'est à dire strictement négatif sur $]0;1[$ et strictement positif sur $]1;+\infty[$.

$\boxed{\text{On en conclut que } h_n \text{ est strictement décroissante sur }]0;1[\text{ et strictement croissante sur } [1;+\infty[.}$

2. h_n est continue sur $]0;+\infty[$ car dérivable sur cet intervalle, donc elle est continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Elle est strictement monotone sur chacun de ces intervalle.

De plus, par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} h_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = +\infty$. Comme $h_n(1) = 3$, on a donc :

$$4 \in]h_n(1); \lim_{x\to 0} h_n(x)[$$

et

$$4 \in]h_n(1); \lim_{x\to +\infty} h_n(x)[$$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h_n(x) = 4$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$ et une unique solution sur l'intervalle $]1;+\infty[$ <u>donc admet exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$</u> (comme 1 n'est pas solution). En notant u_n la solution dans $]0;1[$ et v_n la solution dans $]1;+\infty[$, <u>on a bien $u_n < 1 < v_n$.</u>

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ un réel.

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n} \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}} \\ &\boxed{= \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}} \end{aligned}$$

car en développant on constate que $(x-1)(x^{2n+1}-1) = x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x$.

(b) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a donc :

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n - 1)(v_n^{2n+1} - 1)}{v_n^{n+1}}$$

donc

$$h_{n+1}(v_n) - 4 = \frac{(v_n - 1)(v_n^{2n+1} - 1)}{v_n^{n+1}}$$

or $v_n > 1$ donc $v_n - 1 > 0$, $v_n^{2n+1} - 1 > 0$ et $v_n^{n+1} > 0$. On en déduit donc que :

$$h_{n+1}(v_n) - 4 \geq 0$$

$\boxed{\text{et donc } h_{n+1}(v_n) \geq 4.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $h_{n+1}(v_n) \geq 4$ d'après la question précédente, et $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$ par définition, donc

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

Comme h_n est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et que v_n et v_{n+1} sont dans $[1; +\infty[$, on en déduit donc que :

$$v_n \geq v_{n+1}$$

et ceci étant vrai pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, la suite (v_n) est décroissante.

4. (a) La suite (v_n) est décroissante d'après la question 3.(c) et minorée par 1 par définition.

$\boxed{\text{Elle converge donc vers un réel } \ell \text{ vérifiant } \ell \geq 1.}$

(b) Supposons que $\ell > 1$. Puisque (v_n) converge en décroissant vers ℓ on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \ell$. Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$ on a donc :

$$v_n^n \geq \ell^n$$

par croissance de $x \mapsto x^n$, et comme $\lim_{n \to +\infty} \ell^n = +\infty$ (car $\ell > 1$)

$$\boxed{\text{on en déduit par comparaison que } \lim_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty.}$$

Comme $h_n(v_n) = v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n}$ on a donc $\lim_{n \to +\infty} h_n(v_n) = +\infty$ par opérations sur les limites, <u>ce qui contredit le fait que $h_n(v_n)$ est une suite constante égale à 4 par définition de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.</u>

(c) Comme $\ell \geq 1$ et que ℓ n'est pas strictement supérieure à 1 d'après la question précédente, on en déduit que $\ell = 1$ donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = 1}$$

5. Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$ on a $h_n(3) = 3^n + 1 + \frac{1}{3^n} \geq 3^n + 1 \geq 3 + 1 \geq 4$ et donc $h_n(v_n) \leq h_n(3)$. Par croissance de h_n sur $]1; +\infty[$ <u>on en déduit que $v_n \leq 3$.</u>

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n^n est solution de l'équation $X + 1 + \frac{1}{X} = 4$ d'inconnue $X \in]1; 3]$.

$$\begin{aligned}
X + 1 + \frac{1}{X} = 4 &\iff \frac{X^2 + X + 1 - 4X}{X} = 0 \\
&\iff \frac{X^2 - 3X + 1}{X} = 0 \\
&\iff X^2 - 3X + 1 = 0 && \text{car } X \neq 0 \\
&\iff X = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Comme $2 < \sqrt{5} < 3$ on a $0 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$ donc l'unique solution possible est $v_n^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

7. Comme $v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ on a $n\ln(v_n) = \ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\ln(v_n) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = 0$ $\boxed{\text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1.}$

Exercice 5

1. X compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identique et indépendantes, dont le succès "Obtenir un Pile" a une probabilité p.

   $$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$$

2. $\boxed{E(X) = np}$ et $\boxed{V(X) = np(1-p)}$.
3. $\boxed{P(X=0) = (1-p)^n}$ et $\boxed{P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-p)^n}$
4. Le joueur est déclaré vainqueur si $X = 0$ ou si $X = 2$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X=0) + P(X=2) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \\ &= \frac{1}{27} + 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \\ &\boxed{= \frac{13}{27}} \end{aligned}$$

5. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. G vaut...
   - ... 0 si $X = 0$
   - ... -10 si $X = 1$
   - ... 20 si $X = 2$
   - ...-30 si $X = 3$

   $\boxed{\text{ainsi l'ensemble des valeurs prises par } G \text{ est bien } G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}}$

   De plus,
   - $P(G=0) = P(X=0) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$
   - $P(G=-10) = P(X=1) = \dbinom{3}{1}\dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$
   - $P(G=20) = P(X=2) = \dbinom{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$
   - $P(G=-30) = P(X=3) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

   donc sous forme de tableau :

g	-30	-10	0	20
$P(G=g)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{9}$

6. D'après le tableau précédent :

$$\begin{aligned} E(G) &= (-30) \times \frac{8}{27} + (-10) \times \frac{2}{9} + 20 \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{-80}{9} - \frac{20}{9} + \frac{80}{9} \\ &\boxed{= -\frac{20}{9}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{l'espérance de gain d'un joueur est négative donc le jeu n'est pas favorable à ce joueur.}}$

7. (a) $Y(\Omega) = \{-1; 1\}$. Lorsque Y vaut 1, Z vaut 1 et lorsque Y vaut -1, Z vaut 0.

   Les valeurs prises par Z sont 0 et 1, donc Z suit une loi de Bernoulli. De plus,

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(A)$$

   donc Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

   (b) Comme $Z = \dfrac{Y+1}{2}$ on a $Y = 2Z - 1$ donc $E(Y) = 2E(Z) - 1$ par linéarité de l'espérance. Comme Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$ on a $E(Z) = P(A)$ donc :

$$\boxed{E(Y) = 2P(A) - 1}$$

8. D'après la question précédente et le résultat admis : $E(Y) = 2P(A) - 1 = (1 - 2p)^n$. On a donc

$$2P(A) = (1 - 2p)^n + 1$$

donc

$$P(A) = \frac{(1 - 2p)^n + 1}{2}$$

9. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \\
&\iff \frac{(1-2p)^n}{2} \geq 0 \\
&\iff (1-2p)^n \geq 0 \\
&\iff \left[1 - 2p \geq 0 \text{ ou } n \text{ est pair}\right] \\
&\iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ ou } n \text{ est pair}\right]
\end{aligned}$$